$$M = \frac{6a}{r} + 2a\pi r^2 = f(r)$$

$$f'(r) = -\frac{6a}{r^2} + 4a\pi r = 0 \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$

$$f''(r) = 4\pi a + \frac{12a}{r^3} \quad \text{ve} \quad f''\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\right) = 12\pi a > 0$$

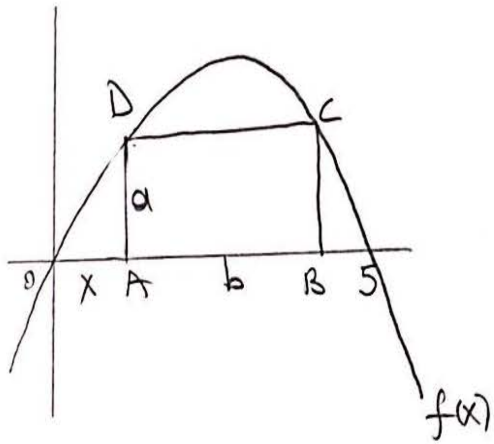
$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ için maliyet minimum olur.

$$h = \frac{3}{\pi\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{2/3}}$$ bulunur.

Örnek: $y = 5x - x^2$ parabolünün birinci bölgede kalan parçasının içine sığacak maksimum alanlı dikdörtgenin boyutları nelerdir?

Çözüm:

$f(x) = x(5 - x)$



$|OA| = x$ dersek $|OB| = x + b$

$|AD| = |BC| = a$

$D(x, a)$ ve $C(x+b, a)$

D ve C grafiğin üzerinde

$f(x) = f(x+b) = a$ dır.

$\Rightarrow 5x - x^2 = 5(x+b) - (x+b)^2$

$5b - 2xb - b^2 = 0$

$b(5 - 2x - b) = 0$ $b \neq 0$ olup $b = 5 - 2x$ dir.

$f(x) = a$ olup $a = 5x - x^2$ dir.

$\Rightarrow a.b = (5x - x^2)(5 - 2x)$

$$A(x) = 2x^3 - 15x^2 + 25x$$

$$A'(x) = 6x^2 - 30x + 25 = 0$$

$x_{1,2} = \dfrac{30 \mp \sqrt{300}}{2.6}$, $0 < x < 5$ olup

$x = \dfrac{30 - \sqrt{300}}{12}$ dir.

x		$\frac{30-\sqrt{300}}{12}$		$\frac{30+\sqrt{300}}{12}$	
$A'(x)$	+	0	−	0	+
$A(x)$	$\nearrow$	maks.	$\searrow$	min.	$\nearrow$

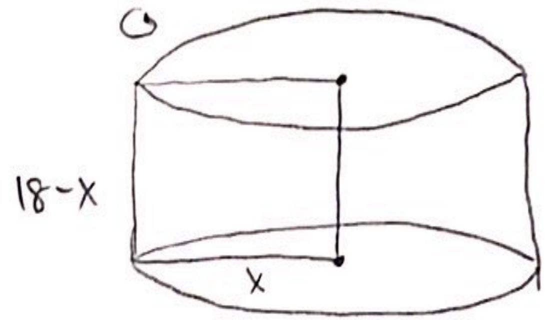
Maksimum alan için $x = \dfrac{30 - \sqrt{300}}{12}$

$$a = \frac{75 - 25\sqrt{3}}{6} - \left(\frac{15 - 5\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$b = 5 - \dfrac{15 - 5\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Örnek: Çevresi 36 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir karton kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel silindirin hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir.

Çözüm:



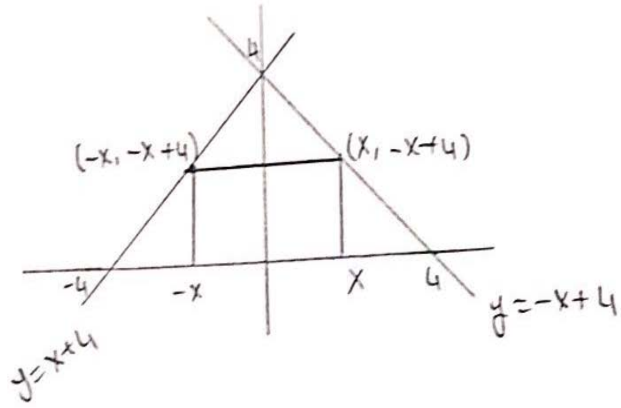
$$V = \pi x^2 . (18 - x)$$
$$= 18\pi x^2 - \pi x^3$$
$$V' = 36\pi x - 3\pi x^2 = 0$$
$$3\pi x (12 - x) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad x = 12$$

$$V'' = 36\pi - 6\pi x$$
$$V''(12) = -36\pi < 0$$ $x = 12$ maksimumdur.

Maksimum Hacim $= \pi . 12^2 (18 - 12) = 864\pi$ cm^3 dir.

Örnek! $y = x+4$, $y = -x+4$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgede bulunan, iki köşesi verilen doğrular, iki köşesi de ox-ekseni üzerinde olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 dir.

Çözüm:



$A(x) = 2x(-x+4) = 8x - 2x^2$

$A'(x) = 8 - 4x = 0 \quad x = 2$

$A''(x) = -4 < 0$

$x = 2$ maks.

maks. alan $= A(2) = 8 \ br^2$

BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım (Ters Türev): $I \subset \mathbb{R}$ aralığı $f: I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Her $x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna f nin I aralığındaki ters türevi denir.

Örnek: $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevi $F(x) = x^2$ dur. Bir fonksiyonun her zaman birden fazla ters türevi vardır. Örneğin;

$$F_1(x) = x^2 + 1 \quad , \quad F_2(x) = x^2 + 3 \quad F_3(x) = x^2 - 10$$

fonksiyonları da $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 2x$ olduğundan $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevleridir.

Teorem: Bir f fonksiyonunun herhangi iki ters türev fonksiyonu F ve G olsun. Bu durumda $F(x)-G(x)=c$ $c\in\mathbb{R}$ dir. Yani aynı fonksiyonun iki ters türevi en fazla bir sabit kadar farklı olabilir. Bu nedenle $F(x)+c$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun en genel ters türev ifadesidir.

Örnek: $f(x)=4x^3+2x+3$ fonksiyonunun en genel ters türevi

$$F(x)=x^4+x^2+3x+c \text{ dir, } (c\in\mathbb{R})$$

Belirsiz İntegral Notasyonu

$F'(x)=f(x)$ olmak üzere bir f fonksiyonunun en genel ters türev ifadesi

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\int f(x)dx$ ifadesi f nin x e göre belirsiz integrali olarak adlandırılır. Yani f nin tüm ters türev fonksiyonlarının kümesine f nin belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)dx$$ sembolü ile gösterilir.

Burada

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}} \underbrace{dx}_{\text{değişkenin göst. dif. operatörü}} = \overbrace{F(x)}^{\text{ters türev fonk}} + \underbrace{c}_{\text{integral sabiti}} \quad , \; c \in \mathbb{R} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak türev ve integral birbirinin tersi işlemlerdir diyebiliriz, ancak dikkat edilmesi gereken bir husus vardır.

! UYARI : $F'(x) = f(x)$, $F(x)$, $f(x)$ in ters türevi

$$\int \frac{d}{dx}(F(x))dx = \int f(x)dx = F(x) + c$$

Yani fonksiyonun önce türevi sonra integrali alınırsa kendisine eşit olmaz.

Ancak tam tersi;

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}(F(x)+c) = f(x)$$

Önce integral sonra türevi alınırsa kendisine eşit olur.

Teorem: $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon ve bunların ters türevleri F, G olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1) $\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$

2) $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

dir.

Bu teoreme göre

- λf nin ters türevi λF
- $f+g$ nin 〃 $F+G$ olur.

Ters türev ilişkisinden bazı fonksiyonların integralleri

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$\frac{d}{dx}(x+c)=1 \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(x+c)dx = \int dx = x+c$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|)=\frac{1}{x} \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(\ln|x|)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(e^x)dx = \int e^x dx = e^x+c$$

$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x \ln a \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(a^x)dx = \int a^x \ln a\, dx = a^x+c$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(\sin x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad \int \frac{d}{dx}(\tan x)\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x \qquad \int \frac{d}{dx}(-\cot x)\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 dx = -\cot x + c$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}\right\} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$= -\operatorname{arccot} x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \Rightarrow \int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \Rightarrow \int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

Örnek: $I = \int \left(2x^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{x} - \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \right) dx = ?$

Çözüm: $I = 2\int x^3 dx + \frac{4}{5}\int x^{1/3} dx - \int \frac{x^{1/2}}{x^2} dx - \int \frac{x^{1/2}}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^{2/5}} dx$

$$I = 2\int x^3 dx + \frac{4}{5}\int x^{1/3} dx - \int x^{-3/2} dx - \int x^{-\frac{5}{2}} dx + \int x^{-2/5} dx$$

$$I = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} + 2x^{-1/2} + \frac{2}{3} x^{-3/2} + \frac{5}{3} x^{3/5} + c$$

Burada herbir integral için integral sabiti c_1, c_2, c_3, c_4 olmak üzere $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ yazılabilir.